Rechenmethoden der Physik II

Sonderübungen, Zettel 06 **Vorrechnung der Lösungen ab dem 15.09.2009**

[SÜ20]

Das Skalarpotential der Elektrostatik kann man durch eine Summe von Produkten eines Multipol-Potentials mit dem entsprechenden Multipolmoment ausdrücken, was in kartesischen Koordinaten leicht als Taylorentwicklung identifiziert werden kann.

Betrachten Sie eine Ladungsverteilung mit acht Punktladungen. Hierbei seien in kartesischen Koordinaten vier Ladungen $+q$ bei

$$(x, y, z) = (0, d, 0), (0, -d, 0), (0, 0, d), (0, 0, -d)\,,$$

sowie vier Ladungen $-q$ bei

$$(x, y, z) = (-d, 0, 0), (-d/2, 0, 0), (d, 0, 0), (2d, 0, 0)\,.$$

Bestimmen Sie Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment für diese Ladungsverteilung.

[SÜ21]

Bestimmen Sie mit Variationsrechnung alle lokalen Extrema $\bar{x}(t)$ der folgenden Funktionale:

a) $F[x] = \int_0^1 \mathrm{d}t\,[x(t)^2 + \dot{x}(t)^2]\,, \qquad x(0) = 1,\ \dot{x}(1) = 0,$

b) $F[x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t\,[\dot{x}(t)^2 + x(t)^2 - 4x(t)\sin t]\,, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}(\frac{\pi}{2}) = 0\,.$

[SÜ22]

Extremieren Sie das folgende Funktional $F[x]$ mit der Nebenbedingung $N[x] = 0$ für

$$\begin{aligned} F[x] &= \int_0^\pi \mathrm{d}t\,\left[2x(t)\sin t + \dot{x}(t)^2\right]\,, \qquad x(0) = x(\pi) = 0\,, \\ N[x] &= -1 + \int_0^\pi \mathrm{d}t\ x\,. \end{aligned}$$

Bitte wenden

[SÜ23]

Gehen Sie bei folgendem Variationsproblem ähnlich vor wie in Hausübung 11, Aufgabe 84, und zeigen Sie, dass ein Extremum $\bar{x}(t)$ des Funktionals $F[x]$ mit Nebenbedingung $N[x] = 0$ für

$$\begin{aligned} F[x] &= \int_0^1 \mathrm{d}t \; x(t) \qquad x(0) = x(1) = 0\,, \\ N[x] &= -\frac{\pi}{3} + \int_0^1 \mathrm{d}t \; \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}\,, \end{aligned}$$

folgende Differentialgleichung erfüllen muss:

$$\lambda \ddot{\bar{x}} = -(1 + \dot{\bar{x}}^2)^{\frac{3}{2}}\,,$$

wobei λ der Lagrange-Multiplikator ist. Lösen Sie schließlich diese Differentialgleichung (für $y = \dot{\bar{x}}$) mit den gegebenen Anfangswerten und bestimmen Sie λ mit Hilfe der Nebenbedingung. Nutzen Sie hierbei die in **[SÜ19]** angegebene Stammfunktion.

Hinweise:

- $\dot{\bar{x}}^2 = \frac{(c-t)^2}{\lambda^2 - (c-t)^2}$ wird gelöst durch $\bar{x}(t) = \pm\sqrt{\lambda^2 - (c-t)^2} + d$

- Schlagen Sie das letzte Integral in einer Formelsammlung nach.